

Table des matières

Chap 11 : Applications linéaires	1
I Comment montrer qu'une application est linéaire?	1
II Comment définir une application linéaire?	2
III Comment décider si une application linéaire est injective?	3
IV Comment montrer qu'une application linéaire est surjective?	4
V Comment montrer qu'une application linéaire est bijective?	5
V.1 En dimension quelconque	5
V.2 Si la dimension est finie	5

I Comment montrer qu'une application est linéaire?

Soient E et F deux ev sur le même corps $\mathbb{K}$ et $u : E \rightarrow F$.

Méthode 1:

Revenir à la définition :

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{y})$$



Remarque :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in E$, on a $u(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k)$.

Méthode 2:

Montrer qu'il existe une matrice A telle que $u : E \rightarrow F$ s'écrit $u(X) = AX$ pour tout $X \in E$.

■ Exemple 1 :

Si $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors, avec la matrice

$$(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + y + z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on observe que

$$u \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est linéaire.

Méthode 3:

Écrire u comme combinaison linéaire ou composée d'application "connue" pour être linéaire.

- Id_E , projecteurs, symétries, homothétie
- l'évaluation : Si X est un ensemble non vide et $a \in X$,

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathcal{F}(X, E) &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

- la dérivation :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f^{(n)} \end{aligned}$$

- la primitive :

$$\begin{aligned} I : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \int_a f \end{aligned}$$

- l'intégration :

$$\begin{aligned} I : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

- la transposition

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} &\longmapsto {}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On considère $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P(X) \mapsto XP'(2) + P(1)$

Montrer que φ est une application linéaire.

Rappels de définition :

- Un *endomorphisme* est une application linéaire de E vers E .
- Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
- Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif.
- Une *forme linéaire* est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.



$GL(E)$ n'est pas un espace vectoriel : en-effet, $0_{\mathcal{L}(E)} \notin GL(E)$

II Comment définir une application linéaire ?

Méthode 4:

Par une formule

On écrit explicitement ce que vaut $u(x)$ pour tout $x \in E$ et on montre que u est bien une application linéaire.

Méthode 5:

En déterminant l'image d'une base

Si $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , pour définir une application linéaire de E vers F , il suffit de définir $u(e_1), \dots, u(e_n)$.

Montrer que si H est un hyperplan dans un ev E de dimension finie, alors il existe $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\ker u = H$.

Rappel : Si $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_n\}$ des vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire telle que $u(e_i) = f_i$.

De plus,

- $\mathcal{C}$ est libre $\iff u$ est injective.
- $\mathcal{C}$ est une base de F $\iff u$ est bijective.
- $\mathcal{C}$ est génératrice de F $\iff u$ est surjective.

Méthode 6:

Par unicité de l'application linéaire qui détermine l'image d'une base.

■ Exemple 2 :

Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application telle que :

$$u((1, 1, 1)) = (0, 0, 0), \quad u((1, 0, 1)) = (1, -1, 1), \quad u((0, 1, 1)) = (0, 2, -1)$$

Alors, comme $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (**A.D**) il existe une unique application linéaire h telle que $h(x) = u(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.

On peut éventuellement trouver sa formule grâce au changement de base. Par exemple grâce à la démarche suivante :

On a (**A.D**)

$$(x, y, z) = (y - z + x)(1, 1, 1) + (z - y)(1, 0, 1) + (z - x)(0, 1, 1)$$

D'où

$$\begin{aligned} u((x, y, z)) &= (y - z + x)u((1, 1, 1)) + (z - y)u((1, 0, 1)) + (z - x)u((0, 1, 1)) \\ &= (y - z + x)(0, 0, 0) + (z - y)(1, -1, 1) + (z - x)(0, 2, -1) \\ &= (z - y, -(z - y) + 2(z - x), (z - y) - (z - x)) \\ &= (z - y, z + y - 2x, x - y) \end{aligned}$$

III Comment décider si une application linéaire est injective ?

Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$.

Méthode 7:

u est injective ssi $\ker u \subset \{\vec{0}_E\}$.

c'est-à-dire que, pour tout $\vec{x} \in E$, $(u(\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E)$

Directement à l'aide de la "formule de l'image" :

■ Exemple 3 :

$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective :
 $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Soit $X \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $X = (x, y)$. Ainsi,

$$u(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

D'où $\ker u = \{0\}$, ainsi l'application est injective.

À l'aide de la matrice si on en dispose :

■ Exemple 4 :

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}_2[X]$ linéaire de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que l'application u est injective.

Soit $P = a + bx + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \ker u &\Leftrightarrow M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}(P) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow P = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker u = 0$ et u est injective.

Méthode 8:

u n'est pas injective si $\dim E > \dim F$.

On rappelle en effet que dans ce cas, d'après le théorème du rang, on a que

$$\dim E = \dim \ker u + \underbrace{\text{rg } u}_{\leq \dim F} \leq \dim \ker u + \dim F$$

D'où

$$\dim \ker u \geq \dim E - \dim F > 0$$

Ainsi, u n'est pas injective.

■ Exemple 5 :

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire. Montrer que u ne peut pas être injective.

On constate que

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi, l'application n'est pas injective.

Méthode 9:

u est injective ssi $\text{rg } u = \dim E$ (= nombre de colonnes de la matrice.)

■ Exemple 6 :

Soit $u : \mathbb{R}[X] \mapsto \mathbb{R}_2[X]$ linéaire de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que l'application u est injective.

Sur la matrice, on observe directement que

$$\text{rg } u = 2$$

car la matrice est composée de deux vecteurs colonnes sont colinéaires. Ainsi, on a $\dim \mathbb{R}[X] = 2 = \text{rg } u$. L'application est donc injective.

On remarque qu'on peut également démontrer ceci en disant :

$$\text{rg } u = 2 = \text{nombre de colonnes de la matrice de } u.$$

Donc u est injective.

Méthode 10:

Une composée d'applications linéaires injectives est injective

Montrer qu'un endomorphisme *nilpotent* (i.e. un endomorphisme f tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^n = 0$) n'est jamais injectif.

Méthode 11:

Si l'image par u d'une base de E est une famille libre de F , alors u est injective.



Remarque :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E; F)$ est injective, alors $\dim E \leq \dim F$ (conséquence du théorème du rang.)

■ Exemple 7 :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n[X])$ définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad u(X^k) = (1 + X)^k.$$

Montrer que u est injective.

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, la famille $(u(1), u(X), \dots, u(X^n)) = ((1 + X)^0, \dots, (1 + X)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ (car de degrés échelonnés).

Ainsi, u est injective.

IV Comment montrer qu'une application linéaire est surjective ?

Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$.

Méthode 12:

u surjective ssi $\text{rg } u \geq \dim F$ (= nombre de lignes de la matrice.).

■ Exemple 8 :

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$. Montrer que φ est surjective.

Comme $\varphi \neq 0$, il existe au moins un vecteur non nul dans $\text{Im } \varphi$. On a donc

$$\text{rg } \varphi = \dim \text{Im } \varphi \geq 1 = \dim \underbrace{\mathbb{K}}_{=F}$$

D'où φ est surjective.

Si on dispose d'une matrice M de u : l'affirmation se transforme en

u surjective ssi $\text{rg } M = \text{nombre de colonnes de } M$

Méthode 13:

Si E, F sont de dimensions finies avec $\dim E = \dim F$, alors u surjective $\Leftrightarrow u$ injective.



Remarque :

En terme de matrice, “dimensions finies égales” se traduit par “matrice carrée.”



CONFUSION

Matrice carrée ne signifie en aucun cas que u est automatiquement injective ou surjective. Cela signifie seulement que **si** u est injectif, **alors** u est surjectif (et réciproquement).

Méthode 14:

Si l'image par u d'une base de E est une famille génératrice de F , alors u est surjective.



Remarque :

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où $F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$. Pour montrer que u est surjective, il suffit de montrer que l'on peut "atteindre" les $\vec{v}_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n[X])$ définie par :

$$u(1) = X^n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad u(X^k) = X^{n-k}(1 + X^k).$$

Montrer que u est surjectif.

Méthode 15:

Écrire u comme composée d'applications linéaires surjectives

▼ Comment montrer qu'une application linéaire est bijective ?

V-1 En dimension quelconque

Méthode 16:

Montrer que u est injective et surjective.



L'ensemble des automorphismes de E , noté $GL(E)$ **n'est pas** un espace vectoriel. Mais toutefois, c'est un groupe (non commutatif en général!)

V-2

Si la dimension est finie

Méthode 17:

Soient E, F deux K -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\dim E = \dim F$
alors u est bijective dès que u est injective ou u est surjective.



Remarque :

| Préférez utiliser " u est bijective dès que u est injective".



Remarque :

| Si on dispose d'une matrice, on préfère généralement s'intéresser au rang de u .

Méthode 18:

Si l'image par u d'une base de E est une base de F , alors u est un isomorphisme

Rappel : Un isomorphisme conserve la dimension.

■ Exemple 9 :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n[X])$ définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad u(X^k) = (1 + X)^k.$$

Montrer que u est bijective.

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, la famille $(u(1), u(X), \dots, u(X^n)) = ((1 + X)^0, \dots, (1 + X)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ (car de degrés échelonnés) et de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, d'où $(u(1), u(X), \dots, u(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, u est injective, donc bijective car c'est un endomorphisme en dimension finie.